

马克斯《周期》波动曲线的获取及位置判断方法

——股票市场周期波动的数学原理及分析方法

高宏

(清华大学, 北京 100084)

【摘要】霍华德·马克斯观察到的《周期》波动曲线客观存在，投资者的投资收益完全取决于买入点和卖出点在周期波动曲线上的相对位置。因此要想投资成功首先应解决两个关键问题，一是获得与股票价格同步的周期波动曲线，二是准确判断当前处在周期波动曲线上的具体位置。本文从数学上证明了马克斯描述的《周期》波动就隐藏在股票价格曲线中，并给出了《周期》波动的范围、获取方法及位置判断方法，可为投资者提供准确的买卖时机，实现熊市底部买入、牛市顶部卖出的最佳投资目标。

本文与马克斯《周期》相辅相成，本文将《周期》从感性认识提高到理性认识，从定性分析变为定量分析，从经验总结上升为科学理论。本文是对马克斯 50 多年的投资实践经验进行科学抽象形成的理论，马克斯 50 多年的投资实践结果是对本文科学理论的充分实验验证。

早在 100 多年前，发明 DJIA 道琼斯指数、并创办《华尔街日报》的查尔斯·道 (Charles Dow) 就发现股票价格中的波动是由基本波动、次级波动和日常波动三种波动叠加而成。1902 年查尔斯·道去世后，汉密尔顿 (Hamilton) 和雷亚 (Rhea) 将查尔斯·道发表在《华尔街日报》上的系列文章归纳总结为《道氏理论》。由于查尔斯·道在生前只观察到了 5 年的股票市场数据，没有发现股票价格波动中存在的长期线性趋势。

第一位获得诺贝尔经济学奖的美国经济学家萨缪尔森 (Samuelson) 通过对过去半个世纪美国股票指数收益率的实证研究，发现股票指数收益率具有平均每年 8% 的线性增长率，并在 1965 年建立了带漂移的[股票价格几何布朗运动模型](#)。因此，实际股票价格由图 1 所示的线性趋势 (零频波动)、基本波动、次级波动和日常波动四种不同周期的波动叠加而成，股票价格可用下式表示：

股票价格=线性趋势+基本波动+次级波动+日常波动

马克斯《周期》中所说的**周期波动**实质上是指《道氏理论》中的**基本波动**。

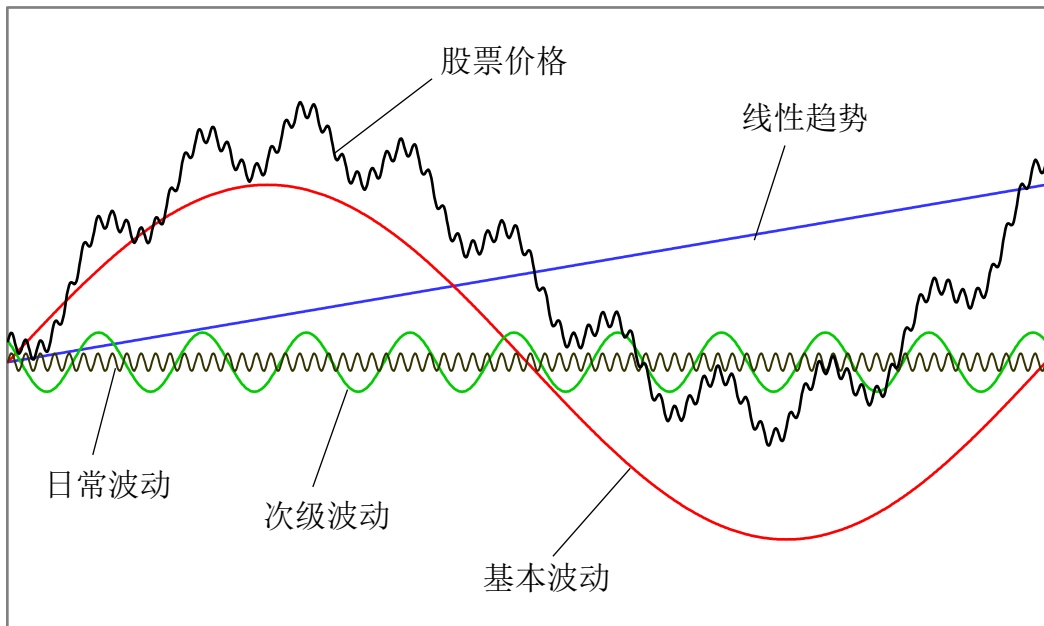


图 1 股票价格中的四种波动

一、道氏理论简介

查尔斯·道通过对股票市场的观察，发现股票价格波动由以下三种不同级别的波动叠加而成：

基本波动：周期 1 年或 1 年以上的波动，看起来像大海中的潮汐现象，波动幅度最大。基本波动上升时形成股票市场的牛市，下降时形成股票市场的熊市。例如，在 2005 年-2007 年的牛市中，上证指数从 2005 年 6 月 6 日的 998.23 点一直上升到 2007 年 10 月 16 日的 6124.04 点，增长幅度高达 613.48%。马斯克《周期》中的市场波动就是指基本波动。基本波动具有很大的惯性，一旦形成趋势就会持续一段时间，因此基本波动的趋势可以被预测。

次级波动：周期 3 周到 3 个月的波动，看起来像大海波浪，波动幅度为基本波动幅度的三分之一左右。次级波动的方向与基本波动的方向可能相同，也可能相反。当次级波动的方向与基本波动相反时，在牛市中会形成幅度较大的中期调整，使投资者误认为股票市场开始下跌；在下降过程中会形成幅度较大的反弹，使投资者误认为股票市场开始反转。因此，次级波动具有很大的欺骗性，难以为股票投资提供准确、可靠的科学决策信息。

日常波动：周期为几天以内的波动，具有很强的随机性，不可预测，看起来像海面上的波纹。日常波动的幅度虽然不大，但是对判断基本波动位置和趋势会带来极大的干扰。例如，同样在 2005 年-2007 年的牛市中，上证指数日常波动的最大幅度为 9%，波动标准差 3.1%，

但是上证指数平均到每天的基本波动只有 0.3%，因此，上证指数的基本波动完全被日常波动所淹没，人们难以察觉到基本波动的存在。

道氏理论的伟大之处在于，100 年多前就发现市场波动由三种不同周期的波动叠加而成，并且指出产生波动的原因源自投资者的心理行为，认为基本波动的趋势可以被预测。受历史局限性，道氏理论没有给出分析和判别基本波动的方法。

二、股票价格运动定律

观察股票价格随时间变化的过程，只有股票价格 s 和时间 t 两个变量，对于 t 的每一个值， s 都有唯一一个确定的值与它对应，因此股票价格 s 是时间 t 的函数，用 $s(t)$ 表示。

设 $y(t) = \ln s(t)$ 为股票对数价格（以下简称股票价格），则 $s(t)$ 在 Δt 区间上的对数收益率为

$$\Delta y(t) = y(t) - y(t - \Delta t) \quad (1)$$

图 2 为上证指数及其对数收益率。从图中可以看出，上证指数的对数收益率 $\Delta y(t)$ 在下一时刻的变化方向和大小完全随机、无法预测，不能用确定性的数学关系式进行描述。

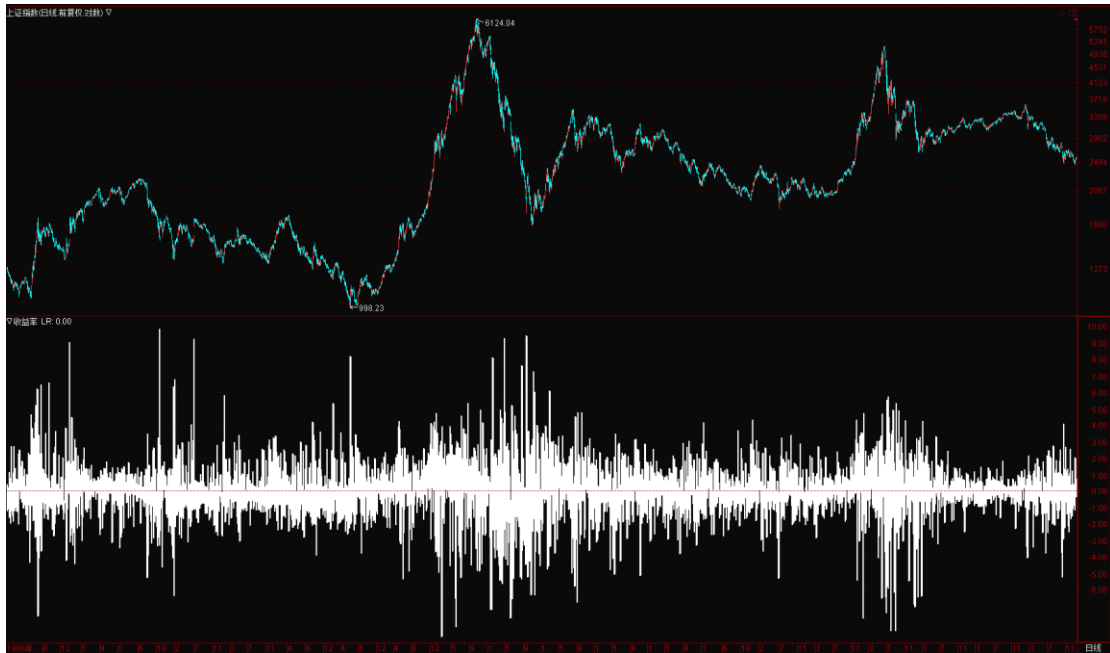


图 2 上证指数及其对数收益率

2013 年诺贝尔经济学奖获得者尤金·法玛（Eugene Fama）在 1965 年就通过对股票市场的实证检验分析发现，股票市场的对数收益率为零均值不相关白噪声序列，并因此提出了著名的 EMH（Efficient Markets Hypothesis）有效市场假说。

从式（1）可以看出，股票价格的对数收益率就是股票对数价格的一阶差分。因此，根

据众多学者对股票对数收益率的规律性认识，本文提出如下的股票价格运动定律：

股票价格运动定律：股票对数价格的一阶差分为零均值不相关白噪声。

可用数学公式表示为：

$$\Delta y(t) = x(t) \quad (2)$$

其中 $x(t)$ 为零均值不相关白噪声函数。

“白噪声”的名称来源于牛顿。1666年，牛顿用三棱镜证明太阳发出的白光是由各种幅值相同但频率不同的各种单色光混合而成。后来人们就将功率谱密度在整个频率轴 $(-\infty, +\infty)$ 上均匀分布的函数或信号称为白噪声。

式(2)是用数学语言表述的对股票市场价格波动现象的规律性认识，将其作为公理，可推导出描述股票价格波动现象的数学模型和揭示股票市场周期波动规律的幅频特性。

三、股票价格数学模型

将式(1)代入式(2)，有

$$y(t) = y(t-\Delta t) + x(t) \quad (3)$$

设 $y(0) = 0$ ，对式(3)反复迭代，可以得到 $t = N\Delta t$ 时刻的股票价格

$$y(n) = \sum_{i=1}^N x(i) \quad (4)$$

将式(4)看作离散化的微分方程，可得出股票价格积分模型：

$$y(t) = \int_0^t x(t) dt \quad (5)$$

式(5)的模型参数(积分上限)会随时间变化，因此股票价格数学模型为非线性时变模型，这就是为什么根据股票历史价格数据建立的量化模型具有时效性、很快就会失效的原因之一。

四、股票价格可预测性

根据股票价格运动定律，股票价格的差分为不相关白噪声，因此式(2)中白噪声 $x(t)$ 的自相关函数为

$$R_x(\tau) = N_0 \delta(\tau) \quad (6)$$

式中 τ 为时间间隔， N_0 为正实常数， $\delta(t)$ 为单位冲击函数。

白噪声 $x(t)$ 仅在时间间隔 $\tau=0$ 时才有相关性，只要两个取值之间的时间间隔不为零，就互不相关，表明股票价格的变化 $\Delta y(t)$ 不可预测。

股票价格的变化 $\Delta y(t)$ 不可预测，并不代表 $y(t)$ 不可预测，我们可计算 $y(t)$ 的自

相关函数

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{y(t-\tau)y(t)} \\ &= \int_0^{t-\tau} \int_0^t x(u) x(v) du dv \\ &= \int_0^{t-\tau} \int_0^t N_0 \delta(u-v) du dv \\ &= \int_0^{t-\tau} N_0 du \\ &= N_0(t-\tau) \end{aligned} \tag{7}$$

式中， τ 为时间间隔。

$R_y(\tau)$ 在 $\tau=0$ 时具有最大值 N_0t ，随着 τ 的增加 $R_y(\tau)$ 线性下降， $\tau \geq t$ 时， $R_y(\tau) = 0$ ，表明 $R_y(\tau)$ 在很宽的范围内具有非零值， $y(t)$ 随时间的变化较为缓慢，存在很大的惯性， $y(t)$ 中存在可以识别和利用的规律，具有可预测性。

马尔基尔 (Malkiel) 在《漫步华尔街》书中依据 $\Delta y(t)$ 不可预测的结论，直接得出了 $y(t)$ 也不可预测的错误判断。《漫步华尔街》自 1973 年出版以来，畅销全球 40 多年，再版 11 次，被亚马逊评为最佳畅销书，并被视为 40 年来最经典的金融投资入门读物，在美国被列为 MBA 学生的必读教学参考书。《漫步华尔街》股票价格不可预测的错误结论误导人们 40 多年。

五、股票价格幅频特性

频域是描述事物周期波动特性时用到的一种坐标系。使用傅立叶变换 (Fourier Transformation)，任何随时间变化的随机运动，均可被分解成为不同频率的谐波分量，而每个谐波分量又可用确定性的正弦或余弦函数表示 (图 3)。

随机现象虽然在时域无法用确定性的数学解析式来描述，但是在频域却可用确定性的数学解析式表示。例如白噪声的功率谱在频域的解析表达式为

$$S(\omega) = N_0 \tag{8}$$

式中 N_0 为正实常数，表明白噪声 $x(t)$ 的功率谱密度在整个频率轴 $(-\infty, +\infty)$ 上均匀分布。 N_0 的物理意义代表白噪声信号在单位电阻上产生的平均功率。

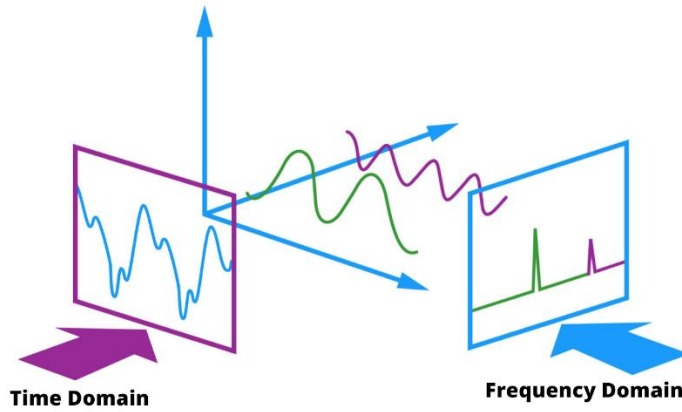


图 3 随机波动频域分解

文章开头已经介绍，股票市场存在线性趋势、基本波动、次级波动和日常波动四种不同周期的波动。在时域中观察股票价格时，这四种不同周期的波动在时间轴上相互叠加，人们很难察觉到线性趋势和基本波动的存在，看到的主要是日常波动和次级波动。

由于线性趋势、基本波动、次级波动和日常波动这四种不同周期的波动频率不同，分别处于频率轴的零频、低频、中频和高频段，在频率轴上相互分离，所以在频域很容易发现隐藏在日常波动和次级波动中的线性趋势和基本波动，看到时域角度看不到的波动特点及规律。因此，频域在信号分析与处理技术领域被称为上帝的视角。

线性趋势、基本波动、次级波动和日常波动四种不同周期的

表 1 随机现象在时域和频域的描述特点

	时域	频域
解析表达式	×	√
有用波动与噪声干扰	叠加	分离
问题类型	随机	确定

白噪声 $x(t)$ 中包含了 $(-\infty, +\infty)$ 所有频率的谐波分量，而且各个谐波分量的幅值相同。假设谐波分量的幅值为 A_0 ，则频率为 ω 的谐波分量可表示为 $A_0 \cos(\omega t)$ ，根据式 (5) 的股票价格积分模型，可直接求出 ω 对应的股票价格 $y(t)$ 在频域的幅值

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= \int_0^t A_0 \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{A_0 \sin(\omega t)}{\omega}
 \end{aligned}$$

$$= tA_0 \text{Sinc}(\omega t) \quad (9)$$

式中， $\text{Sinc}(\omega T)$ 为辛格函数，是正弦函数 $\text{Sin}(\omega T)$ 与单调递减函数 $1/\omega T$ 的乘积。

式 (9) 即为股票价格的频域特性，其幅频特性如图 4 所示。

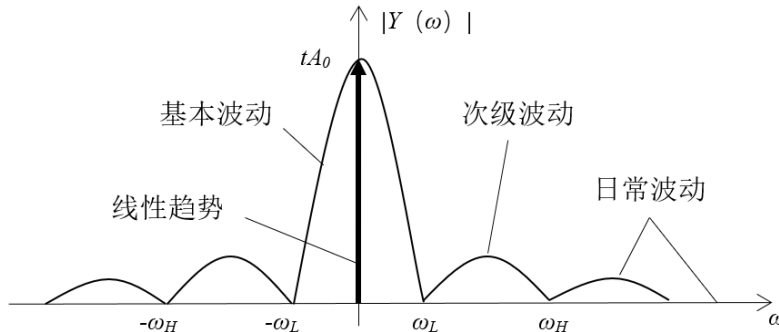


图 4 股票价格幅频特性

股票价格幅频特性 $Y(\omega)$ 表明，白噪声经过积分运算后，变为幅频特性与频率成反比的噪声，其能量主要集中在低频段，在可见光频段，能量主要集中在波长最长的红光，因此这种幅度与频率成反比的噪声被称为红噪声。

股票价格的幅频特性 $Y(\omega)$ 具有如下特点：

(1) $Y(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处有最大值，且与时间 t 成正比，在时域中就表现为，股票价格 $y(t)$ 中有一条与时间 t 成正比的线性趋势线。

(2) Sinc 函数的主瓣 ($0 < \omega \leq \omega_L$) 内集中了 90% 以上的波动能量，因此股票价格低频波动（基本波动）的幅度最大。

(3) $Y(\omega)$ 关于 ω 连续，因此基本波动和次级波动在时域为非周期波动，即每次波动的周期、幅度、位移、速度和加速度均不相同；

(4) $Y(\omega)$ 为时变频谱，基本波动和次级波动的幅值和周期会随时间发生变化，因此一些周期的次级波动会出现，一些周期的次级波动又会消失；

从上面的分析可以看出，在四种不同周期的波动中，基本波动的幅度最大，只要在基本波动的底部买入和顶部卖出，就能真正实现投资收益最大化。

由于基本波动为低频波动，具有很大的惯性，与次级波动和日常波动相比属确定性的波动，因此基本波动在一定时间和条件下会保持原来的运动状态和趋势，能够被跟踪和预测。

六、市场周期波动范围

《周期》认为周期波动的极端位置（牛市最高点和熊市最低点）难以预测，本文将给出

股票价格波动的范围和极端位置判断方法。

将式 (4) 的累加模型进行改写, 有

$$\begin{aligned} y(n) &= \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \right) N \\ &= \overline{x(N)} N \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $x(N)$ 为白噪声 $x(t)$ 在 $[0, N]$ 区间的算术平均值。

由概率论大数定律可知, 随着 N 的增加, 算术平均值 $x(N)$ 会逐渐稳定在一个常数附近, 因此, $y(n)$ 随 N 的增加而线性增长。

由于白噪声 $x(t)$ 的功率谱密度在整个频率轴 $(-\infty, +\infty)$ 上均匀分布, 因此 $x(N)$ 中只有周期与 N 成整数倍或分数倍的谐波分量, 在 $[0, N]$ 区间上的算术平均值等于零, 而其它谐波分量在 $[0, N]$ 区间上的算术平均值不等于零。

根据中心极限定理, 算术平均值 $x(N)$ 一般都服从或近似服从正态分布, 其标准差 σ 与 N 的平方根成反比, 当 N 较大时, σ 的变化非常缓慢。由于算术平均值 $x(N)$ 在 $\pm 3\sigma$ 范围内波动的概率为 99.73%, 因此, $y(n)$ 也会在相应的范围内进行波动。

在实际判断股票市场周期波动的范围时, 不必做任何计算, 利用**线性通道分析法**就能确定周期波动的波动范围和极端位置。以上证指数为例, 在股票行情软件的月 K 线界面下选择对数坐标, 将上证指数的最高点连成一条直线, 得到线性通道的上轨道线; 将上证指数的最低点连成一条直线, 得到线性通道的下轨道线, 上、下轨道线构成图 5 所示的线性通道。



图 5 上证指数线性通道

图 5 中的上、下轨道线就代表上证指数的极端位置区域, 上证指数未来将以 99% 以上

的概率在线性通道内上下波动。如果上证指数靠近下轨道线，表明市场处于熊市的底部；如果上证指数靠近上轨道线，表示市场处于牛市的顶部。上证指数 2018 年 6 月跌破下轨道线，说明市场已处于非理性的低迷状态，同时也预示上证指数即将向上运行。上证指数具体何时开始向上波动，则需要使用下面的周期波动位置分析方法。

图 6 为 DJIA（Dow Jones Industrial Average）道琼斯工业指数自 1896 年到 2018 年的对数波动曲线，显然，道琼斯工业指数 100 多年来一直在线性通道内运行。

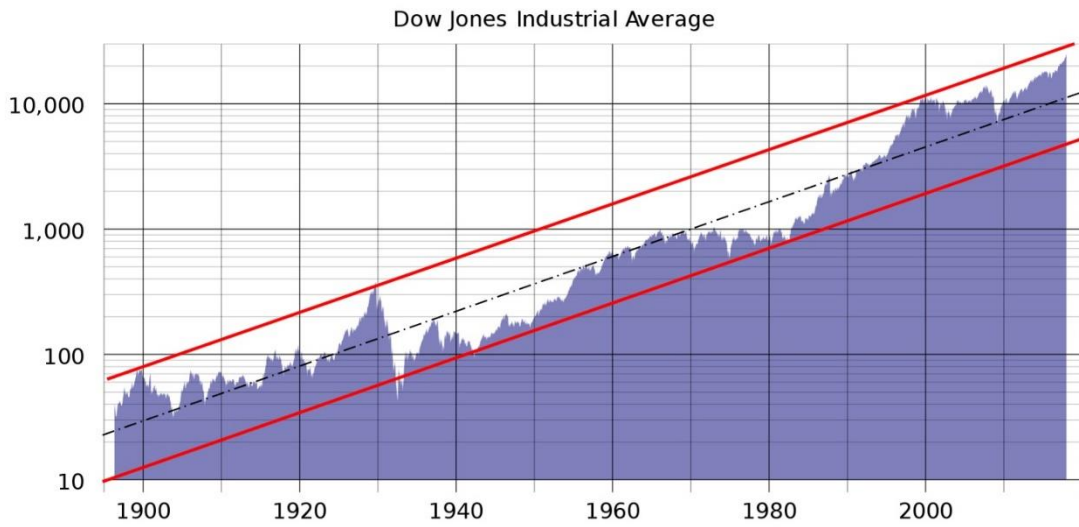


图 6 DJIA 道琼斯工业指数线性通道

从图 6 可以看出，美国历史上发生的五次重大股灾：1929 年的“黑色星期二”华尔街股灾、1987 年的“黑色星期一”华尔街崩盘、2000 年的“互联网泡沫”、2008 年的“次贷危机”和 2011 年的“主权债务危机”均未使道琼斯工业指数改变线性运行趋势。

七、周期波动位置分析

周期波动位置分析分为两步，首先从实际股票价格数据中提取出低频周期波动曲线数据，然后根据周期波动曲线的位置和速度信息，就能判定当前所处的市场波动位置及趋势。

1、获取周期波动曲线

从股票价格的幅频特性可以看出，股票价格中的线性趋势、基本波动、次级波动和日常波动这四种波动在频域是分离的。因此先对股票价格 $y(t)$ 进行快速傅里叶变换，得到股票价格的频谱 $Y(\omega)$ ，然后对 $Y(\omega)$ 中的基本波动频谱 $Y_L(\omega)$ 进行快速傅里叶逆变换，就可得到低频周期波动 $y_L(t)$ 。

图 7 为股票价格低频周期波动 $y_L(t)$ 的提取流程框。图中 FFT（Fast Fourier Transform）

为快速傅立叶变换算法，IFFT（Inverse Fast Fourier Transform）为快速傅立叶逆变换算法， $W(\omega)$ 为用于提取 $Y_L(\omega)$ 的窗函数。

$$W(\omega) = u(\omega) - u(\omega - \omega_L) \quad (11)$$

式中 $u(\omega)$ 为单位阶跃函数，因此有

$$Y_L(\omega) = W(\omega) Y(\omega) \quad (12)$$

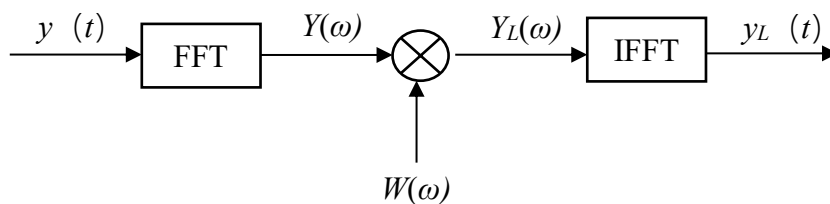


图 7 基本波动提取流程

图 8 为 2001 年 1 月 19 日至 2019 年 4 月 22 日的上证指数月线及提取出的基本波动。



图 8 上证指数（月）及其基本波动

从图 8 可以看出，上证指数的基本波动曲线为一条连续、可微、无折点的光滑曲线，与上证指数的重要上升和下降阶段，以及顶部和底部同步。在牛市过程中基本波动曲线单调上升，在熊市过程中基本波动曲线单调下降，消除了牛市深度调整和熊市大幅反弹对价格波动分析的误判。

2、周期波动阶段划分

本文将基本波动划分为可以用位移、速度（微分）参数识别的六个阶段，即加速上升、减速上升、顶部、加速下降、减速下降和底部（图9），分别与《周期》中的复苏阶段、上涨阶段、筑顶阶段、反转阶段、下跌阶段和筑底阶段相对应。

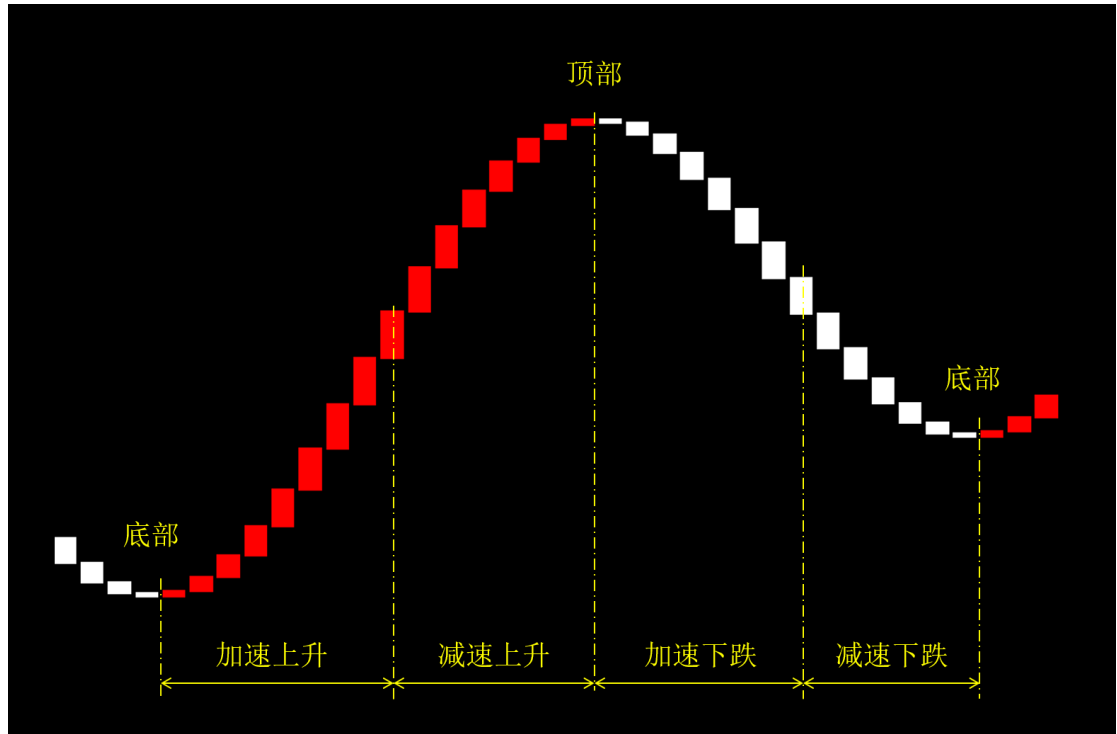


图9 基本波动位置-速度曲线

基本波动各阶段速度（导数）见表2。

表2 基本波动阶段速度

序号	波动阶段	速度（导数）
1	加速上升	> 0
2	减速上升	> 0
3	顶部（极大值）	由正变负
4	加速下降	< 0
5	减速下降	< 0
6	底部（极小值）	由负变正

3、周期波动位置分析

在基本波动曲线的基础上，将单位交易区间（日、周、月等）内基本波动曲线的变化（速度或导数）用柱状实体表示出来（图9）。柱状实体的位置就是基本波动的位置，柱状实体的高度代表基本波动的速度大小，柱状实体的颜色表示基本波动的变化方向，红色为上升，白色为下降。

基本波动的位置和趋势判断方法如下：

加速上升：红色柱体高度由小变大，位置不断升高；

减速上升：红色柱体位置继续升高，但柱体高度由长变短，预示基本波动接近顶部。由于这一过程可持续数月，因此可超前预测顶部的到来；

顶部：红色柱体长度趋于零，且柱体颜色由红变白，表示已经到达基本波动的顶部；

加速下跌：白色柱体由短变长，位置不断下降；

减速下跌：白色柱体位置继续下降，柱体由长变短，预示基本波动即将到达底部。这一过程会持续更长的时间，因此可提前预测底部的到来；

底部：白色柱体长度趋于零，且柱体颜色由白变红，表示已经到达基本波动的底部。

图10为沪深300指数2018年5月15日至2019年4月22日的日线图及其基本波动曲线。从图中可见，沪深300指数在下降过程中不断反弹跳水，会严重干扰投资者的判断并产生误操作。而沪深300指数的基本波动的柱体颜色始终为白色，表明沪深300指数处于单调下降过程中，严禁操作。2019年1月25日，白色柱体高度趋于零，提示沪深300指数已到达底部；1月31日，柱体颜色由白变红，沪深300指数的基本波动底部得到确认。

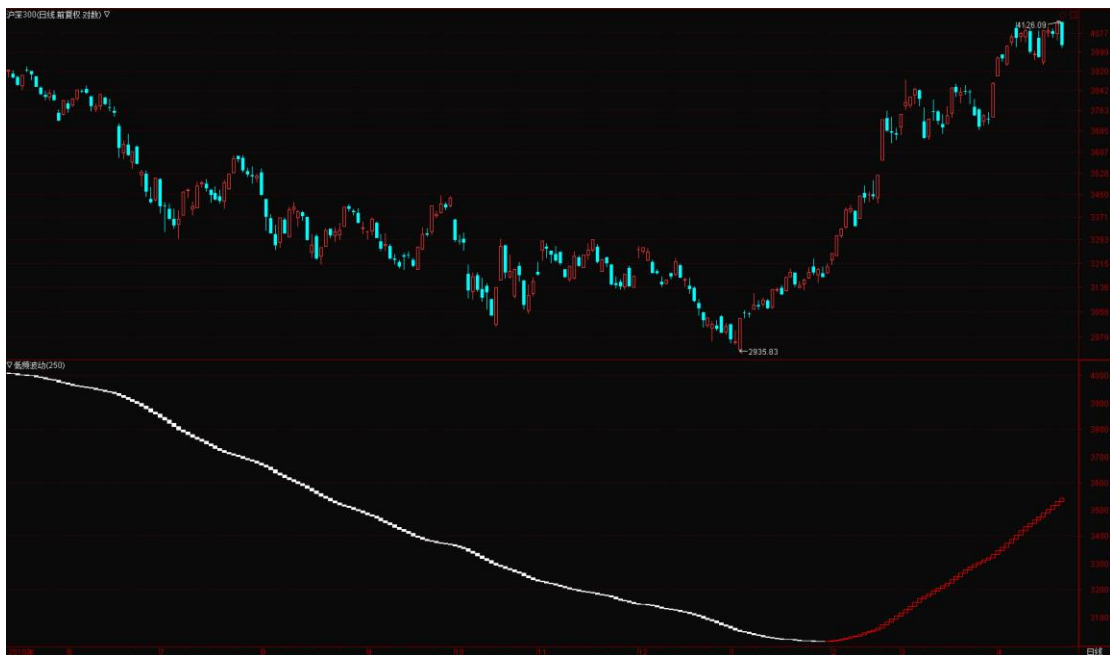


图10 沪深300指数（日）及其基本波动

图 11 为上证 50 指数 2017 年 9 月 27 日至 2019 年 4 月 22 日的 K 线和基本波动曲线(20 日)。基本波动柱线颜色在 2019 年 1 月 22 日由白变红，提示上证 50 指数基本波动已过极小值点。

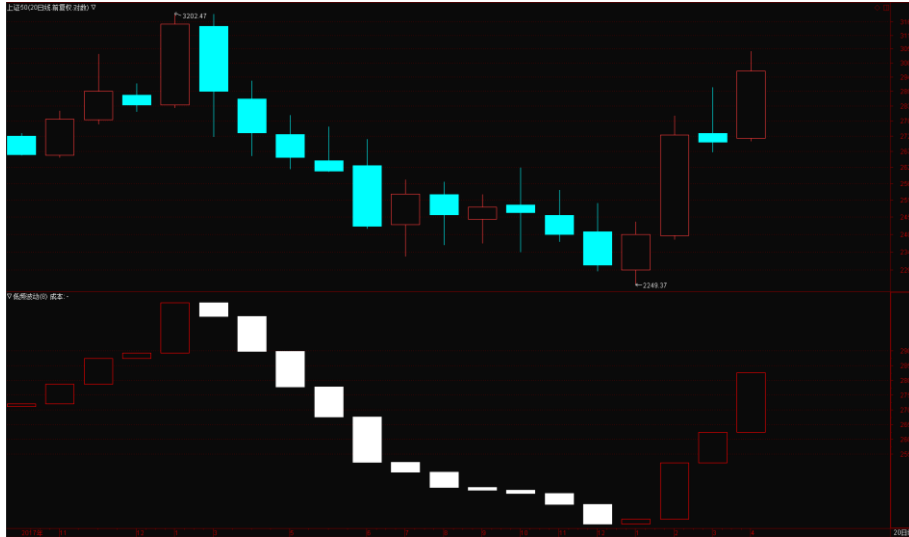


图 11 上证 50 指数（20 日）及其基本波动

七、周期位置分析方法对比

根据股票市场的交易过程，可把股票市场中的所有事物看成是一种外部有环境、内部有结构的信息系统，如图 12 所示。系统为开放式系统，系统与环境的相互联系和相互作用是通过信息交换实现的。输入信息是环境对系统的激励，输出是系统对输入激励的响应。

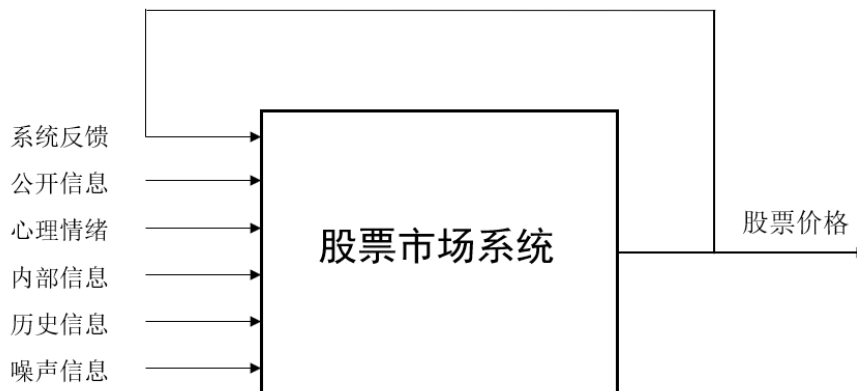


图 12 股票市场系统

股票市场系统的输入信息为公开信息、内部信息、历史信息、噪音信息、心理情绪和系统反馈等，系统的输出为股票指数、股票价格和股票成交量等信息。

股票市场系统包含了众多的投资者，由于每个投资者对同一输入信息的反应各不相同，

而且彼此之间还会相互影响，因此股票市场系统是一个**带有正反馈功能的非线性复杂巨系统**，具有非线性和初值敏感等特点。

股票市场系统具有反馈功能。系统的输出信息返回到系统输入端，作为输入信息作用于系统，以某种方式影响系统的输出。很多投资者不是依据其它输入信息作出反应，而是根据股票价格的变化直接作出反应的现象。投资者往往在股票价格出现上涨后买入，或在股价下跌后抛出，即通常所说的“追涨杀跌”。这种追涨杀跌的正反馈作用会造成放大的杠杆效应，造成股票价格的急剧大幅波动。

《周期》采用的是输入-输出分析方法，先获取影响股票价格周期波动基本面和情绪面信息，然后判断基本面和情绪面信息对周期波动的作用，然后确定当前所处的周期波动位置。

《周期》采用输入-输出分析方法有如下缺点：

- (1) 不可能获得影响周期波动的所有输入信息；
- (2) 初值敏感特性会导致分析结果出现较大的偏差；
- (3) 输入信息对股票价格的作用机制无法用数学模型描述，分析结果因人而异。

本文提出的输出波形分析方法具有如下的优点：

- (1) 股票价格本身就是所有输入信息（影响因素）共同作用的结果；
- (2) 无需获取各种输入信息，也无需研究各种输入信息对股票价格的作用机制；
- (3) 股票投资收益与股票价格的波动幅度成线性关系，因此，直接利用股票价格基本波动的位置和速度数据，就能为投资者提供准确可靠的底部买入和顶部卖出时间信息，实现投资收益最大化。

八、总结

本文根据众多学者对股票价格收益率为不相关白噪声序列的规律性认识，将其作为公理，建立了可描述股票价格波动现象的数学模型，并推导出了可揭示股票波动规律的幅频特性和自相关函数。本文提出的输出波形分析方法可从股票价格数据中同步获取周期波动数据，直接利用周期波动的位置和速度数据进行投资操作，就能在股票市场的周期波动中，实现熊市底部买入、牛市顶部卖出的投资目标。最后用一句话概括：**本文为量化版《周期》。**

参考文献

高宏，[股票价格白噪声积分模型及时域和频域特性](#)，中国数量经济学会 2018 年（昆明）年会，2018 年 10 月 27-28 日